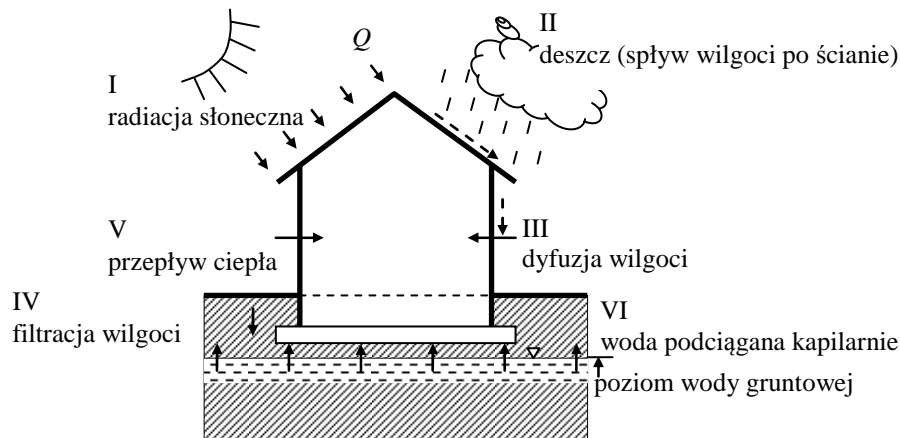


I. PRZEPEŁY W BUDOWLACH

1 Zarys problematyki

Fizyka budowli jest jedną z najmłodszych dziedzin inżynierii budowlanej. Rozwinęła się w latach 70-tych, głównie w wyniku kryzysu energetycznego, aczkolwiek jej podstawy są znacznie starsze. W fizyce budowli analizujemy wszystkie problemy klasycznej fizyki, które mogą być wykorzystane do lepszej eksploatacji budowli. Na rysunku 1.1 przedstawiono schematycznie oddziaływanie otoczenia na budowlę, które są przedmiotem naszego zainteresowania.



Rys.1.1. Oddziaływania otoczenia na budowlę

W istocie będziemy analizować kilka podstawowych zjawisk fizyki budowli: radiację słoneczną (I), deszcz (II), dyfuzję wilgoci (III), filtrację wilgoci (IV), przepływ ciepła (V) oraz migrację kapilarną (VI).

Zjawiska te chcemy:

- poznawać jakościowo i ilościowo,
- prognozować ich kinetykę,
- projektować ściany budynku, z uwzględnieniem wpływu tych zjawisk na warunki eksploatacji i trwałości budynku.

Fizyka budowli nie tylko powinna wyjaśniać te zjawiska, ale również powinna dawać odpowiedzi, jak nimi sterować, aby zapewnić komfort mieszkańcom czy

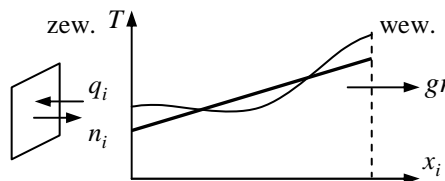
użytkownikom mieszkania i prowadzić do racjonalizacji zużycia energii. To cel minimalny.

Generalnie można powiedzieć, że powinniśmy zmierzać do minimalizacji oddziaływań budowli ze środowiskiem jak tego wymagają zasady ekologii. Jest to jeden z najbardziej istotnych obecnie problemów fizyki budowli, gdyż w budownictwie na straty ciepłe zużywamy 30-40% całkowitej energii. W związku z tym powinniśmy wykorzystać każdy rodzaj dopływu energii, np. słonecznej, geotermalnej. Do pozyskiwania energii słonecznej potrzebujemy odpowiednich urządzeń, które będą tę energię absorbować a następnie przekazywać na cele grzewcze. Temu służą m. in. ogniwa fotowoltaiczne oraz cieczowe kolektory słoneczne różnego typu.

2 Podstawowe rodzaje przepływów masy i energii w przegrodach

Przedstawione poprzednio oddziaływania otoczenia na budowle wywołują w ścianach budynku *przepływy masy i energii*. Zjawiskami tymi będziemy się interesować z uwagi na wywołane przez nie skutki dla jakości życia w budynku. Natomiast różnorodność mechanizmów transportu jest podstawowym problemem klasycznej fizyki budowli. Zasadniczo wyróżnia się następujące typy zjawisk:

I. Przewodność cieplna (prawo Fouriera)

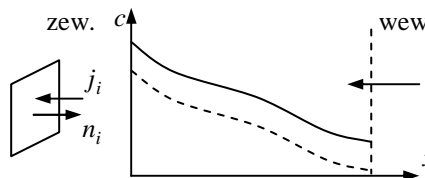


$$q = -\lambda \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

$$q_i = -\lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (2.1)$$

lub $\frac{\partial T}{\partial x_i}$

II. Dyfuzja masy (prawo Ficka)

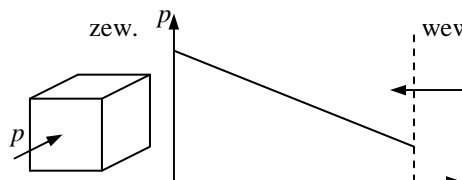


$$j = -D \frac{\Delta c}{\Delta x}$$

$$j_i = -D_{ij} \frac{\partial c}{\partial x_j} \quad (2.2)$$

lub $\frac{\partial c}{\partial x_i}$

III. Przepływy konwekcyjne – filtracja (prawo Darcy'ego)

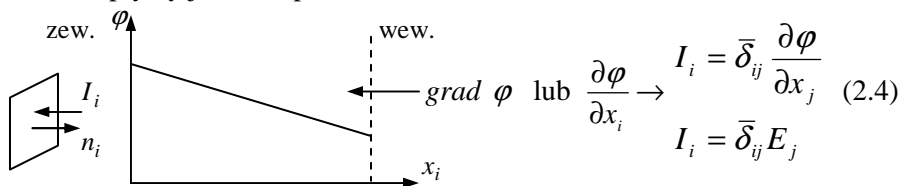


$$J = -k \frac{\Delta p}{\Delta x}$$

$$J_i = -k_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \quad (2.3)$$

lub $\frac{\partial p}{\partial x_i}$

IV. Przepływy jonowe (prawo Ohma)



Przedstawiliśmy tu cztery różne fizyczne zadania przepływów, które będziemy wykorzystywali w fizyce budowli. Opisywane są one przez następujące prawa:

- 1 Prawo Fouriera określające strumień ciepła, wywołany przez gradient temperatury T .
- 2 Prawo Ficka dla przepływów dyfuzyjnych, łączy strumień masy z wywołującym go gradientem stężenia c , a w ogólnym przypadku z gradientem potencjału chemicznego M .
- 3 Prawo Darcy'ego filtracji, które określa strumień filtrującej przez grunt wilgoci w zależności od gradientu ciśnienia p w wodzie.
- 4 Prawo Ohma, w którym strumień nośników ładunku (prąd elektryczny) jest wywołany gradientem potencjału elektrycznego φ .

Równania te mają podobny charakter niezależnie od czterech różnych zjawisk fizycznych, które opisują. W każdym z nich przyczyną jest *gradient pola skalarne*, zaś skutkiem *przepływ masy, ciepła czy prądu*, które są wielkościami wektorowymi. W powyższych przypadkach „współczynnikiem proporcjonalności” tych równań są odpowiednio: tensor współczynników przewodności cieplnej (λ_{ij}), tensor współczynników dyfuzji (D_{ij}), tensor współczynników filtracji (k_{ij}) oraz tensor współczynników przewodności elektrycznej ($\bar{\delta}_{ij}$).

W badaniach laboratoryjnych dla konkretnego materiału powinniśmy wyznaczyć współrzędne wymienionych tensorów. Izotropowe przypadki współczynników transportu prowadzą do najprostszych równań:

$$\text{I. } \lambda_{ij} = \lambda \delta_{ij} \quad \rightarrow \quad q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad \text{— prawo Fouriera,} \quad (2.5)$$

$$\text{II. } D_{ij} = D \delta_{ij} \quad \rightarrow \quad j_i = -D \frac{\partial c}{\partial x_i} \quad \text{— prawo Ficka,} \quad (2.6)$$

$$\text{III. } k_{ij} = k \delta_{ij} \quad \rightarrow \quad J_i = -k \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad \text{— prawo Darcy'ego,} \quad (2.7)$$

$$\text{IV. } \bar{\delta}_{ij} = \bar{\delta} \delta_{ij} \quad \rightarrow \quad I_i = \bar{\delta} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \bar{\delta} E_i \quad - \text{ prawo Ohma;} \quad (2.8)$$

Podobnie, opory mają postać:

$$\text{I. } R_T = \frac{1}{\lambda} \quad - \text{ opór cieplny,} \quad (2.9)$$

$$\text{II. } R_D = \frac{1}{D} \quad - \text{ opór dyfuzyjny,} \quad (2.10)$$

$$\text{III. } R_p = \frac{1}{k} \quad - \text{ opór filtracyjny,} \quad (2.11)$$

$$\text{IV. } R_\varphi = \frac{1}{\bar{\delta}} \quad - \text{ opór elektryczny.} \quad (2.12)$$

W części laboratoryjnej będziemy szacowali współczynniki przewodności cieplnej, dyfuzji i filtracji na podstawie eksperymentów. Współcześnie jednak najczęściej do obróbki wyników eksperymentalnych wykorzystujemy metody informatyczne. Dlatego powinniśmy znać powiązania przepływów ciepła, wilgoci, radiacji ze zjawiskami elektrycznymi lub elektromagnetycznymi.

Z każdym z wymienionych procesów związana jest dyssypacja energii. Każdy z nich wywołuje też w materiałach kapilarno-porowatych odkształcenia. Wartość tych odkształceń jest liniową funkcją przyczyn, czyli przyrostów temperatury, stężeń, ciśnienia i potencjału elektrycznego. Odkształcenia ε_{ij} wywołane przepływem ciepła, masy, filtracji i polem elektrycznym są polem tensorowym, wywołującym dystorsje, których równania fizyczne mają postać:

$$\text{I. } \varepsilon_{ij}^T = \alpha_{ij}^T \theta \quad \xrightarrow{\text{izotropia}} \quad \alpha_{ij}^T = \alpha^T \delta_{ij} \quad (2.13)$$

$$\text{II. } \varepsilon_{ij}^c = \alpha_{ij}^c c \quad \xrightarrow{\text{izotropia}} \quad \alpha_{ij}^c = \alpha^c \delta_{ij} \quad (2.14)$$

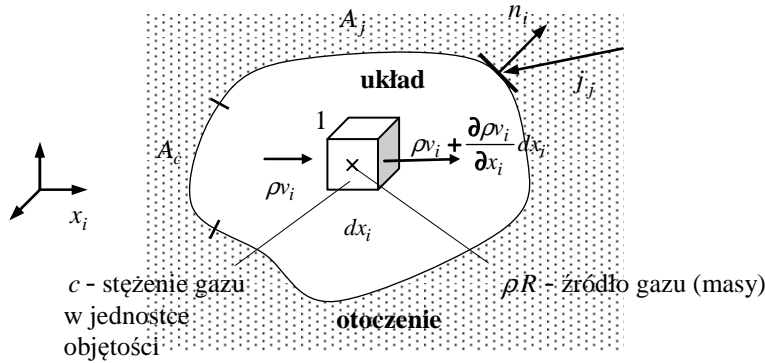
$$\text{III. } \varepsilon_{ij}^p = \alpha_{ij}^p p \quad \xrightarrow{\text{izotropia}} \quad \alpha_{ij}^p = \alpha^p \delta_{ij} \quad (2.15)$$

$$\text{IV. } \varepsilon_{ij}^\varphi = \alpha_{ij}^\varphi \varphi \quad \xrightarrow{\text{izotropia}} \quad \alpha_{ij}^\varphi = \alpha^\varphi \delta_{ij} \quad (2.16)$$

Znajomość odkształceń dystorsyjnych pozwala określić naprężenia w przegrodzie a dalej wytężenie i narastanie zniszczeń materiału.

3 Dyfuzja gazów w materiałach budowlanych

Analizujemy tu najprostsze z możliwych zjawisk transportu jaką jest klasyczna dyfuzja w materiale. W fizyce budowli wymogi te dość dobrze spełnia migracja *radonu* w materiałach budowlanych. Gaz ten w dużym stopniu może stanowić zagrożenie dla zdrowia mieszkańców, np. Pogórza Karkonoszy.



Rys.3.1. Przepływ gazu w materiale

Problem brzegowy ruchu gazu w materiałach opisany jest równaniami:

– bilansu migrującej masy w formie globalnej

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV = \int_V \rho R \, dV \quad (3.1)$$

oraz lokalnej

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = \rho R, \quad j_i = \rho v_i, \quad (3.1')$$

– równaniami łączącymi gradient stężenia ze strumieniem masy czyli ilością masy przepływającej w jednostce czasu przez jednostkę powierzchni

$$j_i = -D_{ij} \frac{\partial \rho}{\partial x_j}, \quad (3.2)$$

– warunkami początkowymi

$$\rho|_{t=0^+} = \rho(0) \quad (3.3)$$

i brzegowymi

$$\rho|_{A_c} = \rho_0, \quad j_i|_{A_j} = \bar{j}_i. \quad (3.4)$$

Po podstawieniu równania fizycznego (3.2) do bilansu migrującego gazu otrzymujemy równanie dyfuzji gazu w materiale budowlanym

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho R + \frac{\partial}{\partial x_i} (D_{ij} \frac{\partial \rho}{\partial x_j}), \quad (3.5)$$

które jest równaniem różniczkowym cząstkowym typu parabolicznego.

W przypadku mieszaniny gazów dyfundujących w przegrodzie, poprzednie rozważania należy uogólnić na przepływ mieszaniny o gęstościach ρ^α ($\alpha=0,1,2,\dots,\alpha$).

W tym przypadku równania (3.1) – (3.4) wypiszemy dla każdego ze składników $0,1,\dots,\alpha,\dots,n$ oddzielnie:

$$\frac{d}{dt} \int_v \rho^\alpha dV = \int_v \rho R^\alpha dV \quad \text{stad} \quad \rho \frac{dc^\alpha}{dt} + (\rho^\alpha v_i^\alpha)_{,i} = \rho R^\alpha, \quad (3.6)$$

$$\text{gdzie } \rho^\alpha, c^\alpha = \rho^\alpha / \rho, \rho = \sum_\alpha \rho^\alpha, v_i^\alpha = w_i + u_i^\alpha, j_i^\alpha = \rho^\alpha v_i^\alpha \quad (3.7)$$

są kolejno gęstością i udziałem masowym składnika, gęstością ośrodka, prędkościami: barycentryczną i dyfuzyjną składnika α oraz wektorem strumienia masy składnika α .

Do równań bilansów należy dodać równania konstytutywne łącząc strumień masy z przyczyną przepływu czyli gradientem udziału masowego c^α

$$j_i^\alpha = -D_{ij}^\alpha \frac{\partial c^\alpha}{\partial x_j}. \quad (3.8)$$

Podobnie należy dołączyć warunki początkowe i brzegowe. Podstawiając równanie na strumień (3.8.) do parcjalnego bilansu masy składnika (α) otrzymamy równanie przepływu dyfuzyjnego

$$\rho \frac{dc^\alpha}{dt} - \frac{\partial}{\partial x_i} (D_{ij}^\alpha \frac{\partial c^\alpha}{\partial x_j}) = \rho R^\alpha, \quad \alpha=1,2,\dots \quad (3.9)$$

Równanie to ulega dalszej komplikacji, kiedy strumień masy j_i^α zależy nie tylko od stężenia c^α , ale i pozostałych stężeń, czy temperatury. Wprowadza się wówczas nowy potencjał przepływu masy, jakim jest potencjał chemiczny M^α ($c, \dots, c^\alpha, \dots, c^n$). Jego gradient wywołuje przepływ

$$j_i^\alpha = -D_{ij}^\alpha \frac{\partial M^\alpha}{\partial x_j}. \quad (3.10)$$

Równanie dyfuzji zawiera kilka przypadków szczególnych zależnych od własności materiału i charakteru przepływu. Przedstawimy je kolejno:

- I. Materiał izotropowy, o równaniu fizycznym $j_i = -Dc_{,i}$ opisany jest zależnością:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \rho R + D \frac{\partial^2 c}{\partial x_i \partial x_i} \text{ lub } \frac{\partial c}{\partial t} = \rho R + D \nabla^2 c. \quad (3.11)$$

- II. Przepływy stacjonarne, gdzie $\dot{c} = 0$, czyli stężenie jest stałe i nie zależy od czasu. Wówczas z (3.5) uzyskamy

$$\rho R \frac{\partial}{\partial x_i} + (D_{ij} \frac{\partial c}{\partial x_j}) = 0, \quad (3.12)$$

a w przypadku izotropowym

$$\rho R + D \frac{\partial^2 c}{\partial x_i \partial x_i} = 0. \quad (3.12')$$

- III. Pole bezźródłowe $\rho R = 0$ i stacjonarne $\dot{c} = 0$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x_i^2} = 0 \text{ lub } \nabla^2 c = 0, \quad (3.13)$$

a po rozpisaniu (równanie Laplace'a)

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial x_3^2} = 0. \quad (3.13')$$

- IV. Przepływ jednowymiarowy bezźródłowy $\rho R = 0$ i stacjonarny $\dot{c} = 0$.

W obliczeniach stężeń w przegrodach budowlanych korzystamy z jednowymiarowego przepływu dyfuzyjnego, gdzie

$c(x_1, x_2, x_3) = c(x)$, stąd

$$\frac{d^2 c}{dx^2} = 0. \quad (3.14)$$

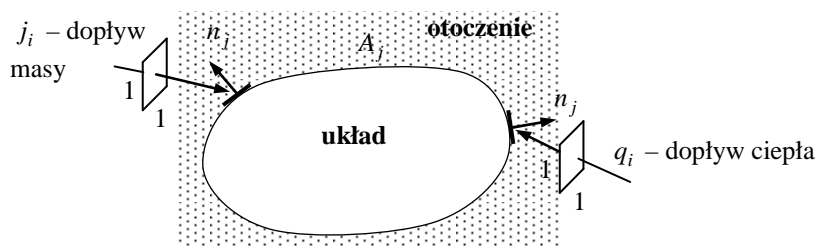
Rozwiązaniem tego prostego równania jest rodzina prostych $c = A \cdot x + B$, zależna od dwóch stałych A i B , które należy wyznaczyć z warunków brzegowych.

Podany model jest zbyt uproszczony, aby mógł być wykorzystany w dokładniejszych obliczeniach fizyki budowli.

4 Zasada zachowania energii

Podamy teraz podstawowe dla fizyki cieplnej budowli równania przewodnictwa cieplnego, które są wykorzystywane przy obliczeniach przepływów, strat cieplnych i projektowaniu izolacji cieplnych budowli. Jest to zagadnienie nieco bardziej złożone z uwagi na przepływy energii i związane z nimi procesy dyssypacyjne. Wymaga to wprowadzenia rozważań termodynamicznych.

W termodynamice wprowadza się pojęcie układu i jego otoczenia.



Rys.4.1. Układ termodynamiczny

Układ termodynamiczny z otoczeniem oddziałuje tak, że może dochodzić do wymiany ciepła i masy. Możliwe są tu generalnie trzy przypadki, a mianowicie:

$$\text{– układ nazywamy izolowanym, jeżeli } q/A = 0, j/A = 0, \quad (4.1)$$

$$\text{– układ nazywamy zamkniętym, jeżeli } q/A = 0, j \neq 0, \quad (4.2)$$

$$\text{– układ nazywamy otwartym, jeżeli } q/A \neq 0, j/A \neq 0. \quad (4.3)$$

Dla określenia całkowitej energii układu trzeba podać zależności między pewnymi wielkościami określającymi energię w układzie jak np. ciśnienie, temperaturę, zmianę objętości itp. Taką wielkością w naszych rozważaniach jest energia wewnętrzna.

Energia wewnętrzną nazywamy sumę energii związanych z ruchem drgającym cząstek i ruchem obrotowym wynikającymi z sił wzajemnego oddziaływania cząstek natury elektrycznej, magnetycznej itp. Wprowadza się również energię kinetyczną, która jest równa energii makroskopowo obserwowanych drgań cząstek.

Punktem wyjściowym rozważań będzie zasada zachowania energii, którą w szkole średniej poznaliśmy jako stwierdzenie, że

„przyrost energii wewnętrznej U i kinetycznej K równa się zmianie energii cieplnej i mocy mechanicznej”.

Matematyczna forma tej zależności jest następująca (I zasada termodynamiki):

$$\Delta(U + K) = \Delta Q + p\Delta V, \quad (4.4)$$

gdzie człon $p\Delta V$ oznacza przyrost pracy gazu o ciśnieniu p i objętości V . Natomiast w ciałach stałych $p\Delta V \rightarrow \sigma_{ij}\Delta\varepsilon_{ij}$, czyli iloczynu tensora naprężeń σ_{ij} i przyrostów odkształceń $\Delta\varepsilon_{ij}$. Zmiana energii wewnętrznej i kinetycznej jest równa sumie zmian ciepła ΔQ i przyrostu pracy mechanicznej $\sigma_{ij}\Delta\varepsilon_{ij}$.

Przedstawione rozważania dotyczą układu izolowanego, w którym wyszczególnione wielkości zmieniają się tylko z czasem, a nie ze współrzędną przestrzenną.

5 Bilans entropii

Do opisu układu trzeba wprowadzić nową wielkość – entropię, której przyrost ΔS analizujemy w stanach równowagowych układu (tzn., kiedy układ nie wymienia z otoczeniem masy, ciepła, ładunku itp.). Przyrost entropii w przemianie odwracalnej równa się przyrostowi energii w tej przemianie podzielonej przez temperaturę przemiany T

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}, \quad (5.1)$$

stąd

$$\Delta Q = T\Delta S. \quad (5.2)$$

Podstawiając (5.2) do bilansu energii (4.4) otrzymamy równanie

$$\Delta U = T\Delta S + p\Delta V, \quad (5.3)$$

które w granicy prowadzi do relacji

$$dU = T dS + p dV, \quad (5.3')$$

$$\dot{U} = T\dot{S} + p\dot{V}. \quad (5.3'')$$

W takiej formie analizuje się klasyczną termodynamikę.

Do równania (5.3'') należy dołączyć równanie stanu, wiążące energię wewnętrzną z entropią (I zasada termodynamiki klasycznej)

$$U = U(S, V). \quad (5.4)$$

W przypadku gazu idealnego poddanego działaniu ciśnienia hydrostatycznego $p\delta_{ij}$, czyli

$$\sigma_{ij} = p\delta_{ij}, \quad (5.5)$$

otrzymamy następujące wyrażenie na moc mechaniczną:

$$\sigma_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} = p\delta_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} = p\dot{\epsilon}_{ii} = p dV, \quad (5.6)$$

czyli iloczyn ciśnienia i zmiany objętości w czasie.

Obliczamy z kolei przyrost energii wewnętrznej dU występujący w (5.4)

$$U = U(S, V) \Rightarrow dU = \frac{\partial U}{\partial S} dS + \frac{\partial U}{\partial V} dV, \quad (5.7)$$

wprowadzając (5.7) do (5.3') uzyskamy

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S} - T\right)dS + \left(\frac{\partial U}{\partial V} - p\right)dV = 0. \quad (5.8)$$

Zależność ta powinna być spełniona dla każdego wzrostu entropii dS i objętości dV jako zmiennych niezależnych w procesie.

Otrzymujemy stąd

$$T = \frac{\partial U}{\partial S}, \quad p = \frac{\partial U}{\partial V}, \quad (5.9)$$

równania fizyczne na temperaturę T i ciśnienie p w układzie. Z podanych rozważań uzyskaliśmy klasyczne wyniki termodynamiki dla procesów równowagowych. Takim procesem są np. deformacje ciała idealnie sprężystego, odwracalne zmiany objętości w cieczech i gazach. Równania (5.5) bardzo dobrze się wpisują w teorię gazów i cieczy idealnych, ale zawodzą już w cieczech lepkich i ciałach stałych, szczególnie w deformacjach pozasprężystych.

6 Ośrodki idealne

Model ciała sprężystego wykorzystywany jest jako podstawowy do opisu stanu naprężeń i odkształceń w ciele. Podobnie postąpimy z mieszaniną gazów idealnych stanowiących kolejny ważny element fizyki budowli. W zagadnieniach fizyki budowli interesują nas zmiany naprężeń i deformacje w ciele wywołane dyfuzją i filtracją gazów i cieczy oraz przepływami ciepła.

A. Ciało sprężyste

Podamy energetyczny opis deformacji w ciele sprężystym. Przyjmujemy tu, że energia wewnętrzna ρU jest funkcją entropii S i odkształceń ε_{ij}

$$U = U(S, \varepsilon_{ij}). \quad (6.1)$$

Z zasad termodynamiki otrzymamy przyrost dU

$$dU = T dS + \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}. \quad (6.2)$$

Z drugiej strony, przyrost $U = U(S, \varepsilon_{ij})$ ma postać

$$dU = \frac{\partial U}{\partial S} dS + \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij}. \quad (6.3)$$

Wprowadzając, jak poprzednio (6.3) do (6.2) otrzymamy równania konstytutywne materiału idealnie sprężystego, które wykorzystujemy w fizyce budowli

$$T = \frac{\partial U}{\partial S}, \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}. \quad (6.4)$$

B. Mieszanina idealnych gazów

W fizyce budowli korzysta się często z modelu gazu idealnego, szczególnie przy opisach przepływów gazów i cieczy przez przegrody budowlane.

Rozważania w tym zakresie rozpoczniemy od przypomnienia znanych z fizyki równań stanu gazu idealnego (Clapeyrona).

$$pV = nRT, \quad \text{gdzie} \quad n = \frac{V}{m} = \frac{1}{\rho}. \quad (6.5)$$

W równaniu tym własności gazu określa stała gazowa R .

Rozważmy teraz α -składnikową mieszaninę gazów idealnych. Dla każdego ze składników tej mieszaniny wypiszemy osobno równanie stanu

$$p^\alpha V = n^\alpha R^\alpha T \quad \alpha = 1, 2, \dots, n. \quad (6.6)$$

W każdym ze składników α występuje ciśnienie parcjalne p^α , gęstość ρ^α i $m^\alpha = \frac{1}{\rho^\alpha}$ oraz stała R^α .

W mieszaninie występują wszystkie składniki. Stąd też po zsumowaniu równań stanu poszczególnych składników otrzymamy

$$\sum_{\alpha} p^{\alpha} V = \sum_{\alpha} n^{\alpha} R^{\alpha} T \rightarrow \sum_{\alpha} p^{\alpha} V = pV, p = \sum_{\alpha} p^{\alpha}, \sum_{\alpha} n^{\alpha} R^{\alpha} T = nRT, \quad (6.7)$$

czyli $pV = nRT$.

Ostatnie z równań jest formalnie podobne do równania stanu gazu jednoskładnikowego. Wnosimy stąd, że mieszaninę gazów można sprowadzić do gazu jednoskładnikowego, jeżeli tylko wprowadzić zastępcze wielkości

$$R = \frac{1}{n} \sum_{\alpha} n^{\alpha} R^{\alpha} \quad \text{oraz} \quad p = \sum_{\alpha} p^{\alpha}. \quad (6.8)$$

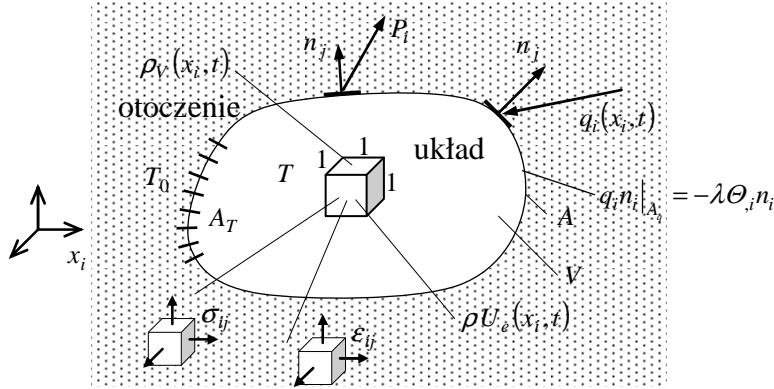
Tutaj R jest stałą gazową mieszaniny, równą sumie stałych R^{α} składników mieszaniny z wagami n^{α}/n . Podobnie ciśnienie w mieszaninie jest sumą ciśnień parcyjnych p^{α} , a ciepło właściwe

$$c_p = \sum_{\alpha} \frac{\rho^{\alpha}}{\rho} c_p^{\alpha}, \quad (6.9)$$

gdzie c_p^{α} jest ciepłem właściwym składnika α mieszaniny.

7 Równanie przewodnictwa ciepła

Podamy obecnie bilanse energii i entropii w ośrodkach niejednorodnych, kiedy pola temperatur T lub $\theta = T - T_0$, entropii S są funkcjami położenia x . Prowadzi to po zsumowaniu do całkowych równań wymienionych bilansów.



Rys.7.1. Model ośrodka z przepływami energii

Będziemy analizowali bilans cieplny w układzie ograniczonym powierzchnią A , w którym będzie występowało źródło ciepła ρr , które jest funkcją położenia i czasu oraz wymiana ciepła, czyli strumień ciepła q_i (jako funkcja położenia i czasu).

Bilans energii cieplnej, po pominięciu energii kinetycznej przyjmuje formę

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho U dV = \int_V \rho r dV - \int_A q_i n_i dA. \quad (7.1)$$

z której wynika, że całkowita zmiana energii wewnętrznej ρU jest równa produkcji źródeł ciepła w V i odpływowi ciepła q_i przez A . Stosując twierdzenie Gaussa otrzymujemy równość

$$\int_V \left(\rho \frac{dU}{dt} - \rho r + q_{i,i} \right) dV = 0. \quad (7.2)$$

i lokalną postać bilansu energii

$$\rho \frac{dU}{dt} = \rho r - q_{i,i}. \quad (7.3)$$

Analizujemy tu tylko proces cieplny, a więc zmiana energii $\rho \dot{U}$ po pominięciu $\rho \dot{V} \approx 0$ wynosi

$$\rho \dot{U} = \rho \dot{S} T. \quad (7.4)$$

Wprowadzimy do rozważań równanie konstytutywne łączące temperaturę i entropię

$$S = c_V T, \quad (7.5)$$

gdzie c_V to ciepło właściwe materiału przy stałej objętości ($dV = 0$).
Podstawiając (7.5) do (7.4) a dalej do bilansu (7.3) otrzymamy

$$\rho \dot{S}T = \rho r - q_{i,i} \quad (7.6_1)$$

oraz

$$\rho c_V \dot{T}T = \rho r - q_{i,i}. \quad (7.6_2)$$

Poczyn $T \times \dot{T}$ powoduje, iż równanie będzie nieliniowe. Okazuje się jednak, że temperatura zmienia się stosunkowo wolno w porównaniu z temperaturą średnią, stąd po wprowadzeniu przyrostu temperatury Θ

$$\Theta(x_i, t) = T(x_i, t) - T_0(x_i), \quad T = \Theta + T_0, \quad \dot{T} = \dot{\Theta} \quad (7.7)$$

otrzymamy

$$\rho c_V \dot{T}T = \rho c_V (\Theta + T_0) \dot{\Theta} \approx \rho c_V T_0 \dot{\Theta}. \quad (7.8)$$

Wprowadzając ten wynik do (7.6₂) uzyskamy

$$\rho c_V T_0 \dot{\Theta} = \rho r - q_{i,i}. \quad (7.9)$$

Podstawiając z kolei równanie Fouriera na strumień ciepła

$$q_i = -\lambda_{ij} \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} \quad (7.10)$$

mamy

$$\rho c_V T_0 \dot{\Theta} = \rho r + \lambda_{ij} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_j \partial x_i}. \quad (7.11)$$

Ostatecznie otrzymaliśmy klasyczne równanie przewodnictwa cieplnego w anizotropowych ciałach stałych. Jest ono podstawą fizyki cieplnej budowli. Występujące w tym równaniu wielkości są zdefiniowane następująco:

ρr – jest to **źródło ciepła**, czyli ilość ciepła która powstaje w jednostce objętości i czasu ośrodka np: ciepło absorpcji cieczy na ściankach, ciepło procesów chemicznych, ciepło przemian fazowych,

q_i – **strumień ciepła**, czyli to ilość ciepła, która przepływa przez jednostkowy ekran w jednostce czasu,

λ_{ij} – tensor **współczynników przewodności cieplnej**, ciało anizotropowe,

$\lambda_{ij} = \lambda \delta_{ij}$ – ciało izotropowe,

$\lambda_{ij} = \lambda_1 (\delta_{1i} \delta_{1j} + \delta_{2i} \delta_{2j}) + \lambda_2 \delta_{3i} \delta_{3j}$ – ciało transwersalno-izotropowe.

Współczynnik przewodności cieplnej jest równy strumieniowi ciepła wytworzonego przez jednostkowy gradient temperatury, czyli przyrost

temperatury o 1° na długości 1cm/1m. Właściwości materiału mają wpływ zarówno na ciepło właściwe oraz na współczynnik przewodności cieplnej.

Aby rozwiązać równania przewodnictwa (7.11) dla konkretnego przypadku uzupełnimy je o warunki brzegowe i początkowe:

$$\Theta(x_i, t = 0_+) = \bar{\Theta}(x_i), \quad (7.12)$$

$$T_0|_{A_r} = T(x_i, t) \text{ – I rodzaju}, \quad (7.13)$$

$$q_i n_i|_{A_q} = -\lambda \Theta \text{ – II rodzaju}, \quad (7.14)$$

$$q_i|_{A_p} = \alpha(T - T_p) n_i \text{ – III rodzaju}, \quad (7.15)$$

$$q_i|_{A_r} = \varepsilon_{ef} \sigma (T_1^4 - T_0^4) n_i \quad T_1 > T_0 \text{ – IV rodzaju}. \quad (7.16)$$

Fizyczna interpretacja warunków brzegowych jest następująca:

W warunkach I rodzaju mamy określoną temperaturę otoczenia na brzegu, co występuje przy zetknięciu się np. dwóch ciał stałych.

Warunek II rodzaju mówi o równości strumieni ciepła na brzegu. Jest to warunek, który musi być spełniony również w zetknięciu ciał stałych.

Warunek III rodzaju występuje wtedy, kiedy mamy do czynienia z zetknięciem ciała stałego z cieczą lub gazem, które znajdują się w określonej temperaturze T_p . Natomiast współczynnik α nazywa się współczynnikiem przejmowania ciepła. Jest to wielkość, która zależy również od własności materiału i określa strumień ciepła i gazu.

Natomiast w warunku IV rodzaju σ jest stałą promieniowania ciała doskonale czarnego ($\sigma = 5,87 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$), a ε to emisyjność, czyli zdolność do promieniowania lub stopień czarności powierzchni.

W przypadku przekazywania promieniowania od powierzchni A_1 o temperaturze T_1 i emisyjności ε_1 do powierzchni A_0 o temperaturze T_0 i emisyjności ε_0 , należy wprowadzić zastępczy współczynnik emisyjności

$$\varepsilon_{ef} = \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)^{-1}. \quad (7.17)$$

Natomiast w przypadku wymiany ciepła między powierzchnią A_1 a otaczającą ją powierzchnią A_0 (np. między kominem a jego obudową) należy stosować wzór na ε_{ef} postaci

$$\varepsilon_{ef} = \left[\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{A_1}{A_0} \left(\frac{1}{\varepsilon_0} - 1 \right) \right]^{-1}. \quad (7.18)$$

Przykład I.1

Należy określić względny przyrost objętości ΔV wywołany zmianami stężeń c w drewnie, czyli materiale ortotropowym.

Odpowiedź:

Przyrost objętości ΔV wyliczymy ze wzoru:

$$\begin{aligned}\Delta V &= (1 + \varepsilon_{11})(1 + \varepsilon_{22})(1 + \varepsilon_{33}) - 1 = (1 + \varepsilon_{11})(1 + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33}) = \\ &= 1 + \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} + \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{11}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} - 1 \cong \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}\end{aligned}$$

czyli $\Delta V = (\alpha_{11}^c + \alpha_{22}^c + \alpha_{33}^c)c$.

Tutaj $\alpha_{11}^c, \alpha_{22}^c, \alpha_{33}^c$ są liniowymi współczynnikami rozszerzalności dyfuzyjnej drewna w głównych kierunkach ortotropii, czyli wzdłuż włókien i prostopadle do nich.